

## Second degré

### 1. Définitions de la fonction polynôme du second degré

#### Définition

Une fonction polynôme du second degré (ou **fonction trinôme** du second degré) est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour toute valeur de départ  $x$  son image vaut  $ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ . Cette écriture s'appelle la **forme développée** de la fonction. La représentation graphique d'une fonction trinôme est une **parabole**.

*Remarque :*  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont appelés respectivement coefficient de  $x^2$ , coefficient de  $x$  et terme constant

*Exemples :*

Soit  $f$  la fonction trinôme telle que  $f(x) = -2x^2 + 3x - 15$

Soit  $g$  la fonction trinôme telle que  $g(x) = 5x^2 + 12$  (ici le coefficient de  $x$  est nul)

#### Définition

Soit  $f$  une fonction trinôme, on a donc  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$

Sa **forme canonique** est donnée par  $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

Pour plus de clarté dans l'écriture, on rassemble certaines expressions dans une même variable et on pose :

- $\Delta = b^2 - 4ac$
- $\alpha = -\frac{b}{2a}$
- $\beta = \frac{-\Delta}{4a}$

Ainsi la forme canonique s'écrit aussi :  $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$  ou  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

*Remarque :* c'est la dernière expression qui est à bien retenir. On peut noter que  $f(\alpha) = \beta$ , ce qui permet de calculer  $\beta$  plus facilement.

*Exemple :*

Soit  $f$  la fonction trinôme telle que  $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = -24$$

$$\alpha = -\frac{4}{2 \times (-2)} = 1$$

$$\beta = \frac{-(-24)}{4 \times (-2)} = -3 \quad \text{ou} \quad \beta = f(\alpha) = f(1) = -2 + 4 - 5 = -3$$

Donc la forme canonique est  $f(x) = -2(x - 1)^2 - 3$

### 2. Minimum et maximum de la fonction trinôme

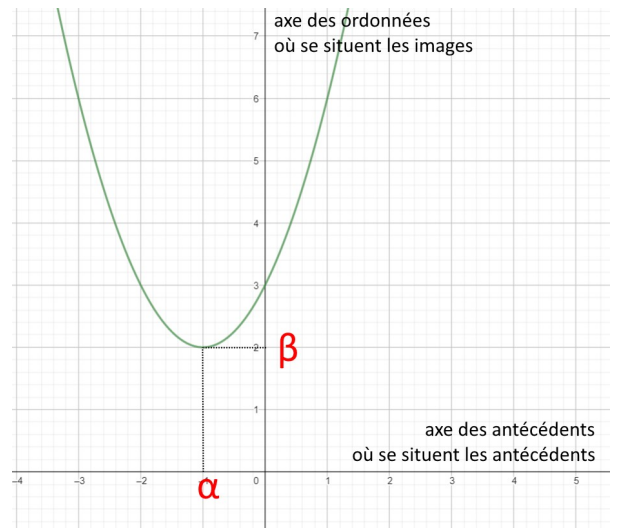
Soit  $f$  une fonction trinôme définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ . Deux cas se présentent :

- Si  $a > 0$  alors  $a(x - \alpha)^2 > 0$  et donc  $a(x - \alpha)^2 + \beta > \beta$  d'où  $f(x) > \beta$   
donc  $\beta$  est un **minimum** pour la fonction  $f$

- Si  $a < 0$  alors  $a(x - \alpha)^2 < 0$  et donc  $a(x - \alpha)^2 + \beta < \beta$  d'où  $f(x) < \beta$   
 donc  $\beta$  est un **maximum** pour la fonction  $f$

Graphiquement  $\beta$  est l'ordonnée du sommet de la parabole.  
 Comme  $\alpha$  est l'antécédent de  $\beta$  donc, graphiquement,  $\alpha$  est l'abscisse du sommet de la parabole.

La parabole est la courbe en vert, représentant une fonction trinôme avec le coefficient de  $x^2$  positif.



### 3. Variations de la fonction trinôme

Soit  $f$  une fonction trinôme définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$

- Si  $a > 0$  alors  $f$  admet un **minimum** en  $\alpha$ , donc  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; \alpha]$  puis croissante sur  $[\alpha; +\infty[$   
 ➤ Si  $a < 0$  alors  $f$  admet un **maximum** en  $\alpha$ , donc  $f$  est croissante sur  $]-\infty; \alpha]$  puis décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$

Rappel :  $\alpha = -\frac{b}{2a}$

### 4. Racines de la fonction trinôme et équation du second degré

#### Définition

Pour une fonction  $f$ , une **racine** est une valeur  $r$  pour laquelle  $f(r) = 0$ .  
 Une racine est donc un antécédent de 0.

En reprenant la forme canonique de  $f$ , on a :  $f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

soit, en factorisant par  $a$  :  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

A l'intérieur du crochet, on reconnaît la forme de l'identité remarquable  $A^2 - B^2$ . Le  $A$  se reconnaît facilement, mais pas le  $B$ . Pour le reconnaître il faudrait que le terme soit au carré, donc qu'il soit positif.

#### 3 cas se présentent :

- $\Delta > 0$  alors  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right]$  car  $\sqrt{\Delta}^2 = \Delta$  si  $\Delta > 0$

On reconnaît parfaitement l'identité remarquable  $A^2 - B^2$  avec  $A = x + \frac{b}{2a}$  et  $B = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$f$  est donc factorisable et  $f(x) = a \left( x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$

Ainsi  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  ou  $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  (on applique **la règle du produit nul**)

Les 2 dernières valeurs encadrées sont donc les racines de la fonction trinôme pour  $\Delta > 0$ .

Ces 2 valeurs sont aussi les **solutions** de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  .  
Elles sont souvent désignées par les variables  $x_1$  et  $x_2$  avec  $x_1 < x_2$  .

➤  $\Delta = 0$  alors  $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  et on obtient directement une forme factorisée.

Ainsi  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

La dernière valeur encadrée est la racine de la fonction trinôme pour  $\Delta = 0$  .

Elle porte le nom de **racine double** à cause du carré et est souvent désignée par la variable  $x_0$  .

Elle est l'unique solution de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  pour  $\Delta = 0$  .

➤  $\Delta < 0$  alors il n'y a pas de factorisation possible et donc pas de racine non plus.

Il n'y a donc pas de solution pour l'équation  $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  pour  $\Delta < 0$  .

### 5. Signe de la fonction trinôme

Soit une fonction trinôme  $f$  telle que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$

Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$

Avec les études faites précédemment, on obtient les courbes représentatives (paraboles) suivantes :

|                                 | $a > 0$  | $a < 0$  |
|---------------------------------|--|--|
| $\Delta > 0$<br>2 racines       | <p>Axe des ordonnées (où se situent les images)</p> <p>Axe des abscisses (où se situent les antécédents)</p> | <p>Axe des ordonnées (où se situent les images)</p> <p>Axe des abscisses (où se situent les antécédents)</p> |
| $\Delta = 0$<br>1 racine double | <p>Axe des ordonnées (où se situent les images)</p> <p>Axe des abscisses (où se situent les antécédents)</p> | <p>Axe des ordonnées (où se situent les images)</p> <p>Axe des abscisses (où se situent les antécédents)</p> |
| $\Delta < 0$<br>pas de racine   | <p>Axe des ordonnées (où se situent les images)</p> <p>Axe des abscisses (où se situent les antécédents)</p> | <p>Axe des ordonnées (où se situent les images)</p> <p>Axe des abscisses (où se situent les antécédents)</p> |

Ces courbes permettent de visualiser très rapidement les variations, le signe et les racines de la fonction trinôme.

Le signe de la fonction trinôme est donc :

|                                 | $a > 0$                                     |           |       |           |           | $a < 0$                                     |           |       |           |           |   |
|---------------------------------|---|-----------|-------|-----------|-----------|---|-----------|-------|-----------|-----------|---|
| $\Delta > 0$<br>2 racines       | $x$   | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$     | $+\infty$ | $x$   | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$     | $+\infty$ |   |
|                                 | $f(x)$                                      | +         | 0     | -         | 0         | +   | $f(x)$    | -     | 0         | +         | 0 |
| $\Delta = 0$<br>1 racine double | $x$   | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |           | $x$   | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |           |   |
|                                 | $f(x)$                                      | +         | 0     | +         |           | $f(x)$                                      | -         | 0     | -         |           |   |
| $\Delta < 0$<br>pas de racine   | Pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$ |           |       |           |           | Pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(x) < 0$ |           |       |           |           |   |

Remarque importante : les variables  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont à l'origine de toutes les autres variables  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Delta$ ,  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  qui s'expriment en fonction des 3 premières et sont posées pour faciliter les écritures.

Exemples :

1)  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

A partir de cette fonction on peut étudier plusieurs aspects, selon la situation d'un problème.

**Étude des variations :**

Le coefficient de  $x^2$  est  $3 > 0$  donc la fonction présente un minimum en  $x = -\frac{2}{2 \times 3} = -\frac{1}{3}$  qui vaut

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

$f$  est donc décroissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{3}]$  puis croissante sur  $[-\frac{1}{3}; +\infty[$

**Recherche des racines :**

Remarque : la recherche des racines revient aussi à chercher les solutions de l'équation  $3x^2 + 2x - 5 = 0$ .

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 64$$

$$\Delta > 0 \text{ donc il y a 2 racines : } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\frac{5}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = 1$$

**Étude du signe :**

Le coefficient de  $x^2$  est  $3 > 0$  donc la fonction est négative entre les racines. On a le tableau de signe suivant :

|        |           |                |   |   |           |
|--------|-----------|----------------|---|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ |   | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | +         | 0              | - | 0 | +         |

**Allure de la courbe représentative :**

