Suites numériques : généralités

1. Définition d'une suite

Définition

Une suite est une liste de nombres ordonnés.

Chaque nombre est un **terme** et sa place dans la suite est un **rang**. Chaque terme est désigné par le nom de la suite (une lettre) avec en indice son rang. Un rang peut commencer à 0.

On note ainsi w_8 le terme de la suite w de rang 8.

De manière général u_n est le terme de la suite u de rang n.

On note aussi la suite u en utilisant ces notations : (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Mode de génération d'une suite

Par une formule explicite

Un terme est calculé à partir de son rang dans la suite. On a donc une fonction qui fait le lien entre le rang et le terme : $u_n = f(n)$ où f est la **fonction associée** à la suite.

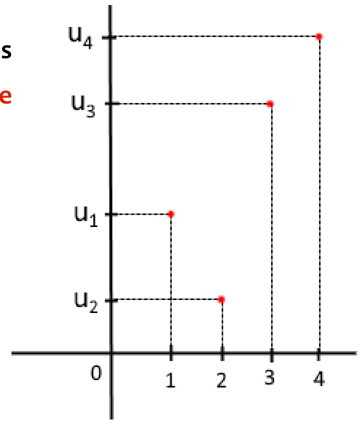
Exemple :

$u_n = 3n^2$ avec f la fonction associée définie par $f(x) = 3x^2$. On a bien $u_n = f(n)$

$u_{10} = 3\times10^2 = 300$ (en choisissant n=10)

Remarque : la formule explicite permet de calculer directement chaque terme. Elle est rapide.

Pour représenter graphiquement la suite, on place les rangs en abscisse et **les termes en ordonnée**, ce qui donne un ensemble de points que l'on nomme **nuage de points**.



Par une formule de récurrence

Un terme est calculé en fonction du précédent. Le premier terme est donné sans calcul. Par exemple on calcule u_3 à partir de u_2 ou u_{18} à partir de u_{17} et on « remonte » ainsi jusqu'au premier terme donné.

De manière générale pour calculer u_{n+1} à partir de u_n on a une fonction qui fait le lien entre les deux : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la **fonction associée** à la suite.

Exemple :

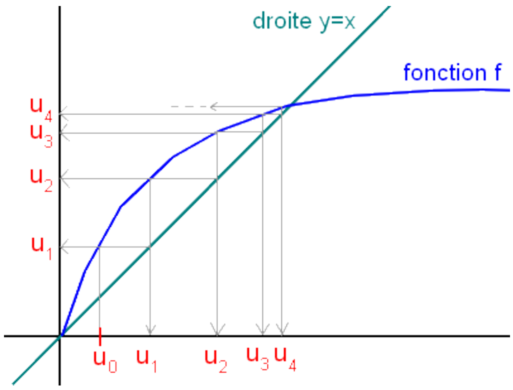
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n+3 \end{cases}$ avec f la fonction associée définie par $f(x) = 2x + 3$. On a bien $u_{n+1} = f(u_n)$

u_0 est le premier terme donné et u_{n+1} , terme de rang $n+1$, est calculé en fonction du précédent u_n , terme de rang n .

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2\times1 + 3 = 5$ $u_2 = 2u_1 + 3 = 2\times5 + 3 = 13$ etc.

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence, on place **les termes en abscisse**. On commence par le premier terme pour lequel on cherche l'image à l'aide de la courbe de la fonction associée, ce qui donne le terme suivant en ordonnée car $u_{n+1} = f(u_n)$.

On reporte ensuite ce terme sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y=x$ (dont tous les points ont des coordonnées pour lesquels l'abscisse est égale à l'ordonnée), et on recommence.



3. Sens de variation d'une suite

Les termes d'une suite peuvent « augmenter » ou « diminuer ». Dans le premier cas on dit que la suite est **croissante**, dans le second que la suite est **décroissante**.

Définition

Une suite u ou (u_n) est croissante à partir de n_0 si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite u ou (u_n) est décroissante à partir de n_0 si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$

Remarque : en général n_0 est le premier rang de la suite, soit 0 ou 1 .

3 méthodes sont disponibles pour déterminer la variation d'une suite. Les 3 consistent à se ramener à la définition et donc **à comparer** u_n **et** u_{n+1} .

1ère **méthode** : on utilise la technique classique pour comparer 2 nombres, **l'étude du signe de leur différence.**

Exemples :

1) Étudier la variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 3$ donc $u_{n+1} - u_n = 3$ et $3 > 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$

La suite u est donc croissante.

2) Étudier la variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n - 1$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - 1 - (n^2 - 2n - 1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 1 - n^2 + 2n + 1 = 2n + 1$ et $n > 0$ donc $2n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Ainsi $u_{n+1} > u_n$ donc u est croissante.

2ème méthode : on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 .

Important : il est impératif que pour tout n $u_n > 0$. En général on peut éviter cette méthode et on utilise la première.

Ainsi si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ est croissante et si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow (u_n)$ est décroissante

Exemple :

Étudier la variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ $u_n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ $n \geq 1 \Rightarrow n+n \geq n+1 \Rightarrow 2n \geq n+1 \Rightarrow \dfrac{2n}{n+1} \geq 1$

Ainsi $u_{n+1} > u_n$ donc u est croissante.

3ème méthode : on étudie les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction associée à la suite.

Important : cette méthode ne vaut uniquement que pour <u>les fonctions définies explicitement</u>.

Ainsi, si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est croissante et si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est décroissante.

En effet, si par exemple f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors pour tout entier naturel n, $n+1 > n$ donc $f(n+1) \geq f(n)$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple :

Étudier les variations de la suite u définie par $u_n = \dfrac{n^2-1}{n+2}$

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ et on a bien $u_n = f(n)$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f'(x) > 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc la suite u est croissante.