Second degré

1. Définitions de la fonction polynôme du second degré

Définition

Une fonction polynôme du second degré (ou fonction trinôme du second degré) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute valeur de départ x son image vaut $ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Cette écriture s'appelle la forme développée de la fonction.

La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole.

Remarque : a , b et c sont appelés respectivement coefficient de x^2 , coefficient de x et terme constant

Exemples :

Soit f la fonction trinôme telle que $f(x) = -2x^2 + 3x - 15$

Soit g la fonction trinôme telle que $g(x) = 5x^2 + 12$ (ici le coefficient de x est nul)

Définition

Soit f une fonction trinôme, on a donc $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Sa forme canonique est donnée par $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$

Pour plus de clarté dans l'écriture, on rassemble certaines expressions dans une même variable et on pose :

- $\Delta = b^2 - 4ac$
- $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$
- $\beta = \dfrac{-\Delta}{4a}$

Ainsi la forme canonique s'écrit aussi : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ ou $\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$

Remarque : c'est la dernière expression qui est à bien retenir. On peut noter que $f(\alpha) = \beta$, ce qui permet de calculer β plus facilement.

Exemple :

Soit f la fonction trinôme telle que $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-5) = -24$ $\alpha = -\dfrac{4}{2 \times (-2)} = 1$ $\beta = \dfrac{-(-24)}{4 \times (-2)} = -3$

ou $\beta = f(\alpha) = f(1) = -2 + 4 - 5 = -3$

Donc la forme canonique est $f(x) = -2(x - 1)^2 - 3$

2. Minimum et maximum de la fonction trinôme

Soit f une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Deux cas se présentent :

- Si $\boxed{a > 0}$ alors $a(x - \alpha)^2 > 0$ et donc $a(x - \alpha)^2 + \beta > \beta$ d'où $\boxed{f(x) > \beta}$

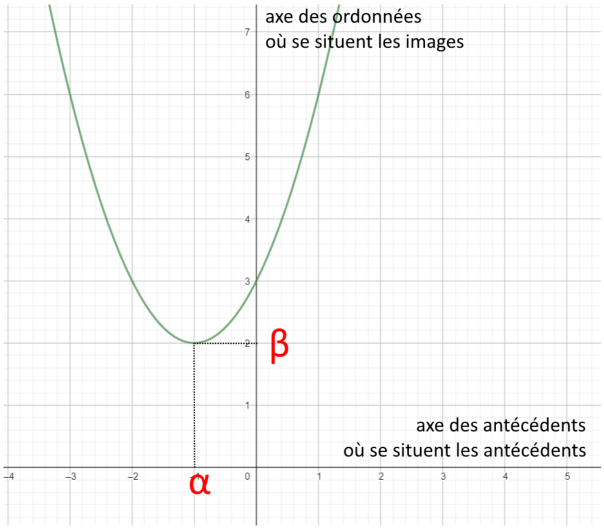
  donc β est un minimum pour la fonction f

- Si $\boxed{a < 0}$ alors $a(x - \alpha)^2 < 0$ et donc $a(x - \alpha)^2 + \beta < \beta$ d'où $\boxed{f(x) < \beta}$

  donc β est un maximum pour la fonction f

Graphiquement β est l'ordonnée du sommet de la parabole. Comme α est l'antécédent de β donc, graphiquement, α est l'abscisse du sommet de la parabole.

La parabole est la courbe en vert, représentant une fonction trinôme avec le coefficient de x^2 positif.



3. Variations de la fonction trinôme

Soit f une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

- Si $\boxed{a > 0}$ alors f admet un <u>minimum</u> en α , donc f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$ puis croissante sur $[\alpha ; +\infty[$
- Si $\boxed{a < 0}$ alors f admet un <u>maximum</u> en α , donc f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$

Rappel : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

4. Racines de la fonction trinôme et équation du second degré

Définition

Pour une fonction f, une racine est une valeur r pour laquelle $f(r) = 0$.

Une racine est donc un antécédent de 0 .

En reprenant la forme canonique de f , on a : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$

soit, en factorisant par a : $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

A l'intérieur du crochet, on reconnaît la forme de l'identité remarquable $A^2 - B^2$. Le A se reconnaît facilement, mais pas le B . Pour le reconnaître il faudrait que le terme soit au carré, donc qu'il soit <u>positif</u>.

<u>**3 cas se présentent**</u> :

- $\boxed{\Delta > 0}$ alors $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$ car $\sqrt{\Delta}^2 = \Delta$ si $\Delta > 0$

  On reconnaît parfaitement l'identité remarquable $A^2 - B^2$ avec $A = x + \dfrac{b}{2a}$ et $B = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

  f est donc factorisable et $f(x) = a\left(x + \dfrac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

  Ainsi $f(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$ ou $\boxed{x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ (on applique la règle du produit nul)

  Les 2 dernières valeurs encadrées sont donc les racines de la fonction trinôme pour $\Delta > 0$.

  Ces 2 valeurs sont aussi les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

  Elles sont souvent désignées par les variables x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.

➢ $\boxed{\Delta = 0}$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et on obtient directement une forme factorisée.

Ainsi $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\dfrac{b}{2a}}$

La dernière valeur encadrée est la racine de la fonction trinôme pour $\Delta = 0$.

Elle porte le nom de racine double à cause du carré et est souvent désignée par la variable x_0 .

Elle est l'unique solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0$ pour $\Delta = 0$.

➢ $\boxed{\Delta < 0}$ alors il n'y a pas de factorisation possible et donc pas de racine non plus.

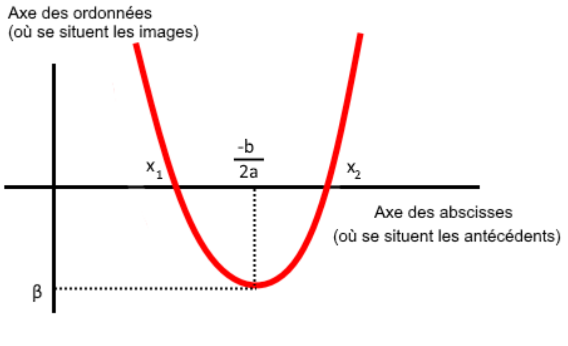
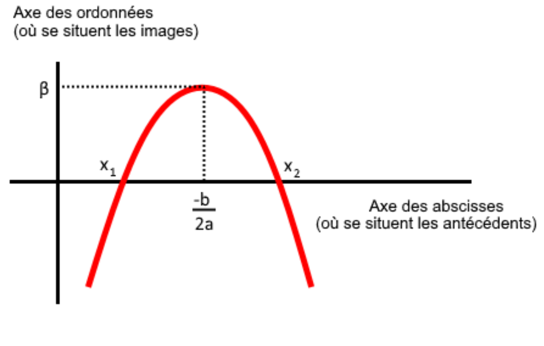
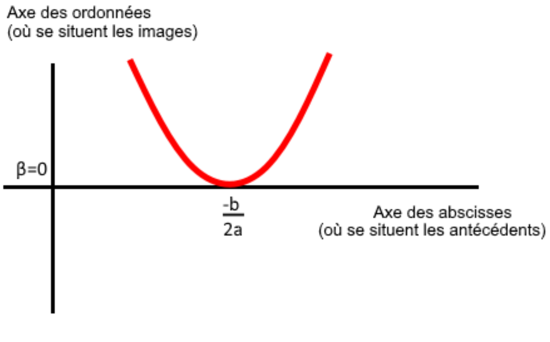
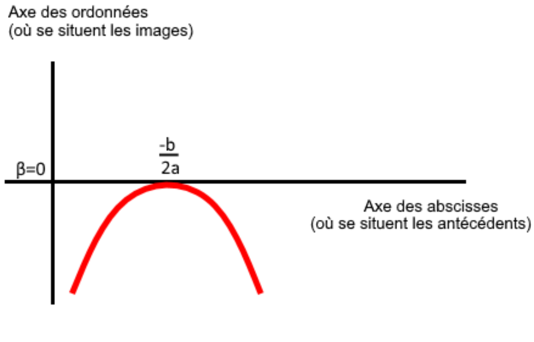
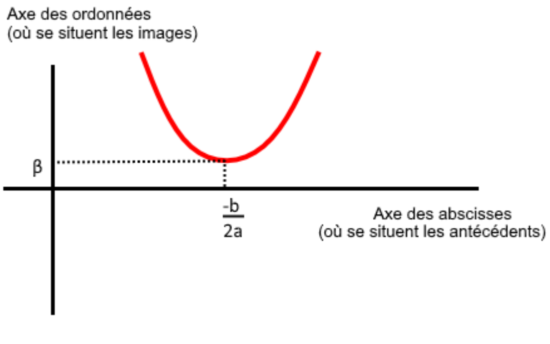
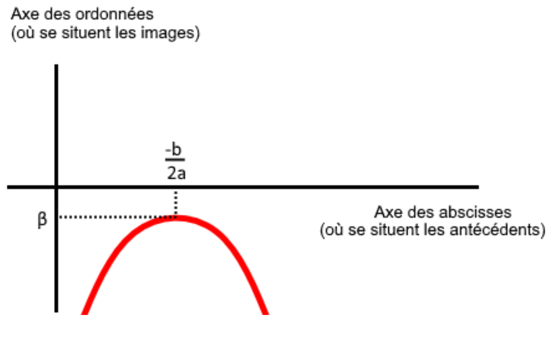
Il n'y a donc pas de solution pour l'équation $ax^2 + bx + c = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0$ pour $\Delta < 0$.

5. Signe de la fonction trinôme

Soit une fonction trinôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

Avec les études faites précédemment, on obtient les courbes représentatives (paraboles) suivantes :

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$
2 racines</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$
1 racine double</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$
pas de racine</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Ces courbes permettent de visualiser très rapidement les variations, le signe et les racines de la fonction trinôme.

Le signe de la fonction trinôme est donc :

	a > 0	**a < 0**
Δ > 0 2 racines	$\begin{array}{c\|cccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|cccccc} x & -\infty & & x_1 & & x_2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$
Δ = 0 1 racine double	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & x_0 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & - & \end{array}$
Δ < 0 pas de racine	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) < 0$

Remarque importante : les variables a , b et c sont à l'origine de toutes les autres variables α , β , Δ , x_0 , x_1 , x_2 qui s'expriment en fonction des 3 premières et sont posées pour faciliter les écritures.

Exemple :

Étude complète de la fonction $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

A partir de cette fonction on peut étudier plusieurs aspects, selon la situation d'un problème.

Étude des variations :

Le coefficient de x^2 est $3 > 0$ donc la fonction présente un minimum en $x = -\dfrac{2}{2 \times 3} = -\dfrac{1}{3}$ qui vaut $f(-\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{16}{3}$

f est donc décroissante sur $]-\infty ; -\dfrac{1}{3}]$ puis croissante sur $[-\dfrac{1}{3} ; +\infty[$

Recherche des racines :

Remarque : la recherche des racines revient aussi à chercher les solutions de l'équation $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 64$

$\Delta > 0$ donc il y a 2 racines : $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\dfrac{5}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3} = 1$

Étude du signe :

Le coefficient de x^2 est $3 > 0$ donc la fonction est négative entre les racines. On a le tableau de signe suivant :

$$\begin{array}{c|cccccc} x & -\infty & & -\frac{5}{3} & & 1 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$$

Allure de la courbe représentative :