Suites numériques : généralités

1. Définition d'une suite

Définition

Une suite est une liste de nombres ordonnés.

Chaque nombre est un terme et sa place dans la suite est un rang. Chaque terme est désigné par le nom de la suite (une lettre) avec en indice son rang. Un rang peut commencer à 0.

On note ainsi w_8 le terme de la suite w de rang 8.

De manière général u_n est le terme de la suite u de rang n.

On note aussi la suite u en utilisant ces notations : (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Mode de génération d'une suite

Par une formule explicite

Un terme est calculé à partir de son rang dans la suite. On a donc une fonction qui fait le lien entre le rang et le terme : $u_n = f(n)$ où f est la fonction associée à la suite.

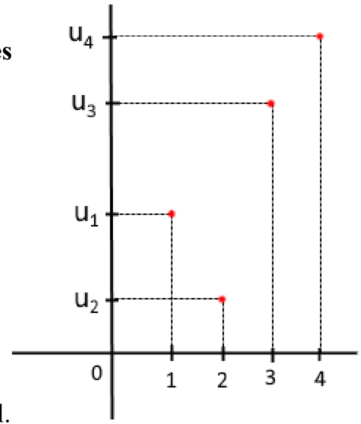
Exemple :

$u_n = 3n^2$ avec f la fonction associée définie par $f(x) = 3x^2$. On a bien $u_n = f(n)$

$u_{10} = 3\times 10^2 = 300$ (en choisissant n=10)

Remarque : la formule explicite permet de calculer directement chaque terme. Elle est rapide.

Pour représenter graphiquement la suite, on place les rangs en abscisse et **les termes en ordonnée**, ce qui donne un ensemble de points que l'on nomme **nuage de points**.



Par une formule de récurrence

Un terme est calculé en fonction du précédent. Le premier terme est donné sans calcul.

Par exemple on calcule u_3 à partir de u_2 ou u_{18} à partir de u_{17} et on « remonte » ainsi jusqu'au premier terme donné.

De manière générale pour calculer u_{n+1} à partir de u_n on a une fonction qui fait le lien entre les deux : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction associée à la suite.

Exemple :

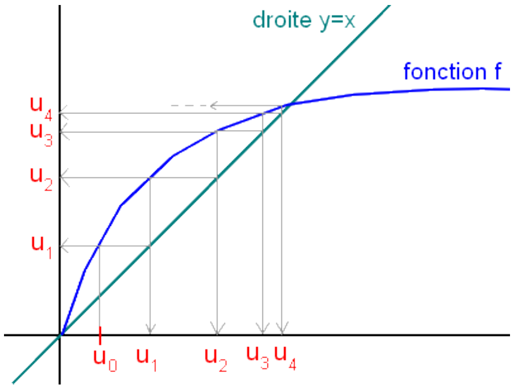
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ avec f la fonction associée définie par $f(x) = 2x + 3$. On a bien $u_{n+1} = f(u_n)$

u_0 est le premier terme donné et u_{n+1} , terme de rang $n+1$, est calculé en fonction du précédent u_n , terme de rang n .

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2\times1 + 3 = 5 \quad u_2 = 2u_1 + 3 = 2\times5 + 3 = 13$ etc.

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence, on place **les termes en abscisse**. On commence par le premier terme pour lequel on cherche l'image à l'aide de la courbe de la fonction associée, ce qui donne le terme suivant en ordonnée car $u_{n+1} = f(u_n)$.

On reporte ensuite ce terme sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y=x$ (dont tous les points ont des coordonnées pour lesquels l'abscisse est égale à l'ordonnée), et on recommence.



3. Sens de variation d'une suite

Les termes d'une suite peuvent « augmenter » ou « diminuer ». Dans le premier cas on dit que la suite est croissante, dans le second que la suite est décroissante.

Définition

Une suite u ou (u_n) est croissante à partir de n_0 si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite u ou (u_n) est décroissante à partir de n_0 si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$

Remarque : en général n_0 est le premier rang de la suite, soit 0 ou 1 .

3 méthodes sont disponibles pour déterminer la variation d'une suite. Les 3 consistent à se ramener à la définition et donc **à comparer** u_n **et** u_{n+1} **.**

1ère méthode : on utilise la technique classique pour comparer 2 nombres, **l'étude du signe de leur différence**.

Exemples :

1) Étudier la variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 3$ donc $u_{n+1} - u_n = 3$ et $3 > 0$

Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc $u_{n+1} > u_n$

La suite u est donc croissante.

2) Étudier la variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n - 1$

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - 1 - (n^2 - 2n - 1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 1 - n^2 + 2n + 1 = 2n + 1$ et $n > 0$ donc

$2n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Ainsi $u_{n+1} > u_n$ donc u est croissante.

2ème méthode : on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 .

Important : il est impératif que pour tout n $u_n > 0$. En général on peut éviter cette méthode et on utilise la première.

Ainsi si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ est croissante et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow (u_n)$ est décroissante

Exemple :

> Étudier la variation de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ par $u_n = \frac{2^n}{n}$
>
> pour tout $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ $u_n > 0$
>
> $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$
>
> Pour $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ $n \geq 1 \Rightarrow n+n \geq n+1 \Rightarrow 2n \geq n+1 \Rightarrow \frac{2n}{n+1} \geq 1$
>
> Ainsi $u_{n+1} > u_n$ donc u est croissante.

3[ème] **méthode** : on étudie les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction associée à la suite.

Important : cette méthode ne vaut uniquement que pour les fonctions définies explicitement.

Ainsi, si f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est croissante et si f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors (u_n) est décroissante.

En effet, si par exemple f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors pour tout entier naturel n, $n+1 > n$ donc $f(n+1) \geq f(n)$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple :

> Étudier les variations de la suite u définie par $u_n = \frac{n^2-1}{n+2}$
>
> soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$ et on a bien $u_n = f(n)$
>
> $$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2}$$
>
> Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $f'(x) > 0$
>
> Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc la suite u est croissante.