Essentiel à connaître sur le second degré

1. Forme développée et forme canonique

Soit f une fonction polynôme du second degré,

Sa forme développée est $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Sa forme canonique est $\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$

2. Minimum et maximum de la fonction

- Si $\boxed{a > 0}$ alors $a(x-\alpha)^2 > 0$ et donc $a(x-\alpha)^2 + \beta > \beta$ d'où $\boxed{f(x) > \beta}$
  donc $\beta = f(\alpha)$ est un minimum pour la fonction f
- Si $\boxed{a < 0}$ alors $a(x-\alpha)^2 < 0$ et donc $a(x-\alpha)^2 + \beta < \beta$ d'où $\boxed{f(x) < \beta}$
  donc $\beta = f(\alpha)$ est un maximum pour la fonction f

3. Variations de la fonction

- Si $\boxed{a > 0}$ alors f admet un <u>minimum</u> en α ,
  donc f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha;+\infty[$
- Si $\boxed{a < 0}$ alors f admet un <u>maximum</u> en α ,
  donc f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha;+\infty[$

4. Forme factorisée

Définition

Pour une fonction f, une racine est une valeur r pour laquelle $f(r) = 0$.

Une racine est donc un antécédent de 0 .

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

3 cas se présentent :

- $\boxed{\Delta > 0}$ alors il existe 2 racines x_1 et x_2 tel que $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
  la fonction peut se factoriser sous la forme : $\boxed{f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$
- $\boxed{\Delta = 0}$ alors il existe une racine x_0 tel que $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
  la fonction peut se factoriser sous la forme $\boxed{f(x) = a(x-x_0)^2}$
- $\boxed{\Delta < 0}$ alors il n'y a pas de racine et pas de factorisation.

5. Équation du second degré

Pour résoudre une équation du second degré, on se ramène à une forme factorisée égale à 0, pour utiliser la règle du produit nul.

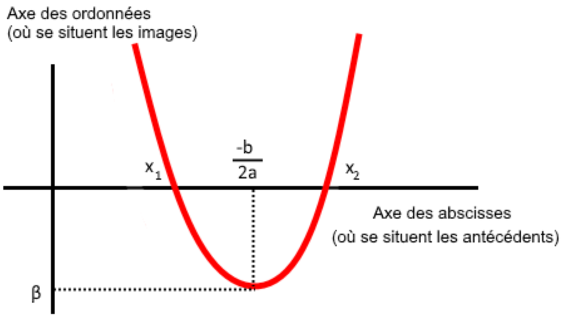
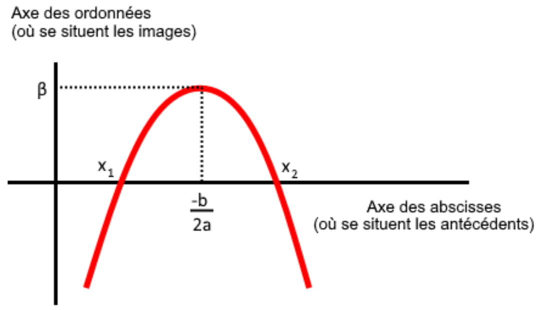
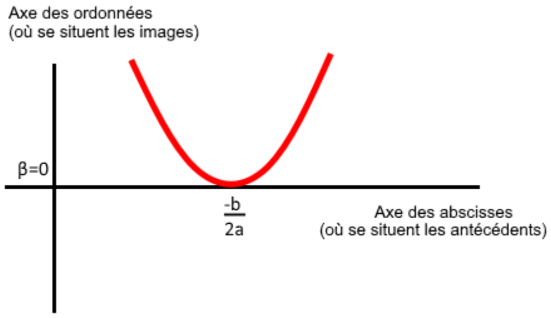
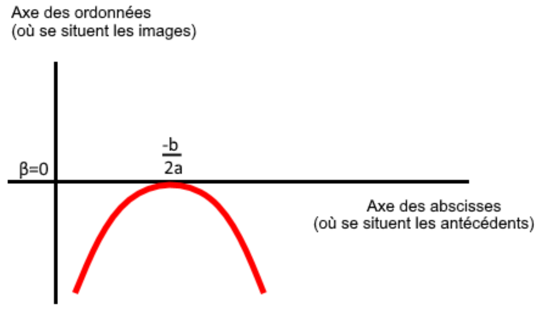
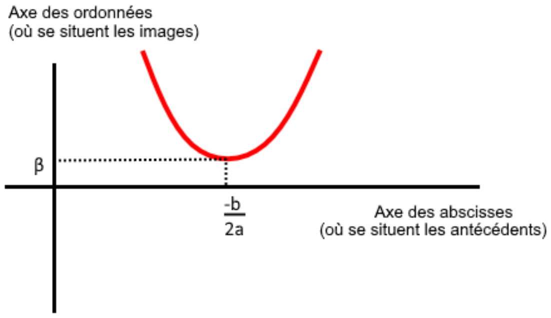
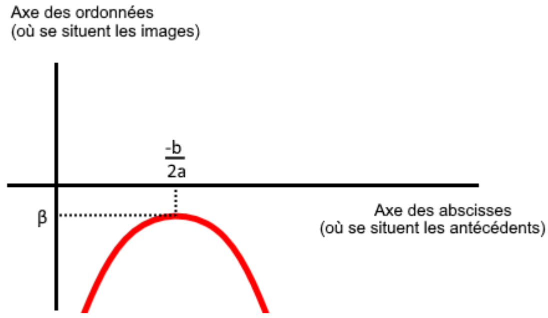
Exemple avec $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2) = 0$

D'après la règle du produit nul : $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$ soit $\boxed{x = x_1}$ ou $\boxed{x = x_2}$

<u>Les solutions de l'équation sont donc les racines du polynôme</u>.

6. Signe de la fonction

La fonction est représentée dans un repère par la courbe d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Cette courbe est appelée parabole.

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$
2 racines</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$
1 racine double</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$
pas de racine</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Le signe de la fonction peut se lire à partir de la courbe :

<table>
<tr><th></th><th>$a > 0$</th><th>$a < 0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$
2 racines</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$
1 racine double</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>−</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$
pas de racine</td><td>Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$</td><td>Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) < 0$</td></tr>
</table>