Résumé sur les suites numériques

1. Définition d'une suite

Définition

Une suite est une liste de nombres ordonnés.

Chaque nombre est un terme et sa place dans la suite est un rang. Chaque terme est désigné par le nom de la suite (une lettre) avec en indice son rang. Un rang peut commencer à 0.

On note ainsi w_8 le terme de la suite w de rang 8.

De manière général u_n est le terme de la suite u de rang n .

On note aussi la suite u en utilisant ces notations : (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Mode de génération d'une suite

Par une formule explicite

Un terme est calculé à partir de son rang dans la suite. On a donc une fonction qui fait le lien entre le rang et le terme : $u_n = f(n)$ où f est la fonction associée à la suite.

Exemple :

$u_n = 3n^2$ avec f la fonction associée définie par $f(x) = 3x^2$. On a bien $u_n = f(n)$

$u_{10} = 3\times 10^2 = 300$ (en choisissant n=10)

Par une formule de récurrence

Un terme est calculé en fonction du précédent. Le premier terme est donné sans calcul. Par exemple on calcule u_3 à partir de u_2 ou u_{18} à partir de u_{17} et on « remonte » ainsi jusqu'au premier terme donné.

De manière générale pour calculer u_{n+1} à partir de u_n on a une fonction qui fait le lien entre les deux : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction associée à la suite.

Exemple :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ avec f la fonction associée définie par $f(x) = 2x + 3$. On a bien $u_{n+1} = f(u_n)$

u_0 est le premier terme donné et u_{n+1} , terme de rang $n+1$, est calculé en fonction du précédent u_n , terme de rang n .

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2\times 1 + 3 = 5$ $u_2 = 2u_1 + 3 = 2\times 5 + 3 = 13$ etc.

3. Sens de variation d'une suite

Les termes d'une suite peuvent « augmenter » ou « diminuer ». Dans le premier cas on dit que la suite est croissante, dans le second que la suite est décroissante.

Définition

Une suite u ou (u_n) est croissante à partir de n_0 si pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite u ou (u_n) est décroissante à partir de n_0 si pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$

La méthode principale pour étudier le sens de variation d'une suite est de comparer u_{n+1} et u_n en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{4}{2^n}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4}{2^{n+1}} - \dfrac{4}{2^n}$

Pour mettre au même dénominateur, on utilise ici les propriétés des exposants : $2^{n+1} = 2^n \times 2$

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4 - 4 \times 2}{2^{n+1}} = \dfrac{-4}{2^{n+1}}$

$-4 < 0$ et $2^{n+1} > 0$ donc $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$.

Ainsi la suite (u_n) est décroissante à partir de 0, ou plus simplement la suite (u_n) est décroissante.

4. Suites arithmétiques et géométriques

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$ r est une constante appelée raison	$u_{n+1} = u_n \times q$ q est une constante appelée raison
Expression en fonction de n ou Formule explicite	$u_n = u_p + (n - p) \times r$ Avec p un entier quelconque. Pour $p = 0$ la formule devient : $u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ Avec p un entier quelconque. Pour $p = 0$ la formule devient : $u_n = u_0 \times q^n$
Somme des premiers termes	$1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

5. Notion de limite

Lorsque le rang de la suite augmente, les termes peuvent se rapprocher d'une valeur. Cette valeur s'appelle la limite de la suite.

Lorsque les termes de la suite dépassent à partir d'un certain rang n'importe quel nombre choisi, alors la suite a pour limite l'infini.

Certaines suites ont des termes qui ne se rapprochent ni d'une valeur ni ne s'éloignent vers l'infini. Ces suites-là n'ont pas de limite.

Exemples :

La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ a pour limite 0.

la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ a pour limite l'infini.

la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n$ n'a pas de limite.