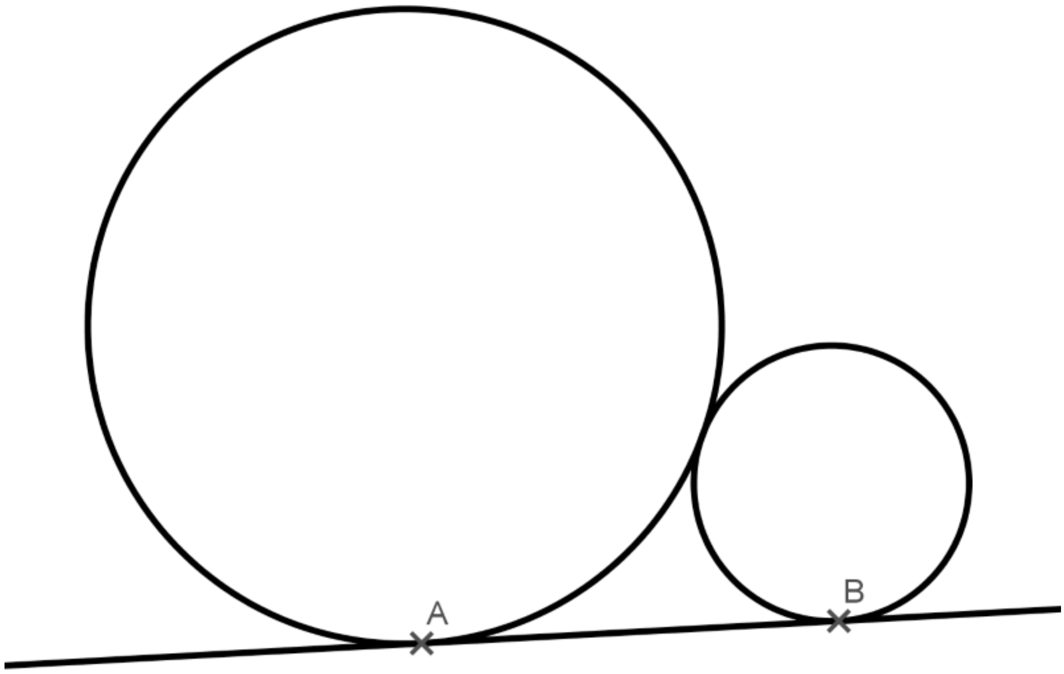
Sangaku n°1

(connaissances requises au maximum : Collège)

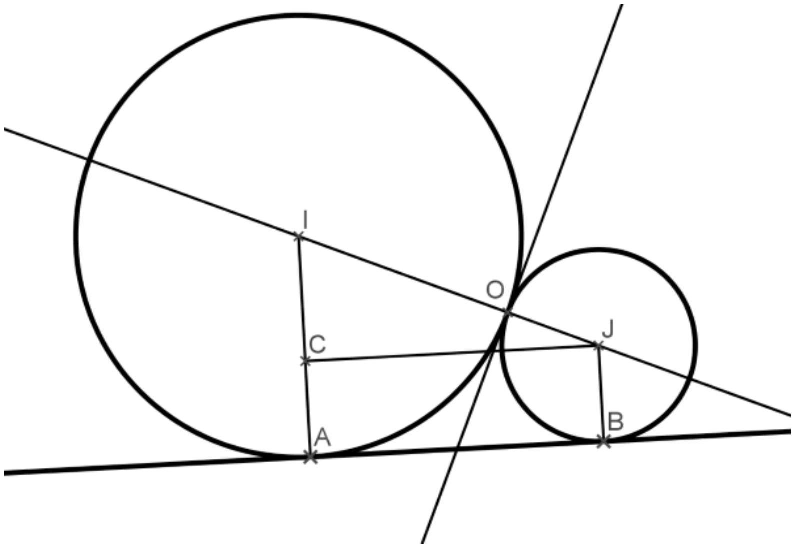
Les sangaku sont des énigmes mathématiques japonaises à caractère géométrique créés durant la période Edo (1600 - 1868). La simplicité des problèmes posés stimule la prise d'initiative.



Montrer que $AB^2 = 4Rr$
où R et r sont les rayons du grand cercle et du petit cercle.

Deux résolutions sont proposées, l'une avec le théorème de Pythagore et l'autre sans.

1[ère] solution (avec Pythagore)

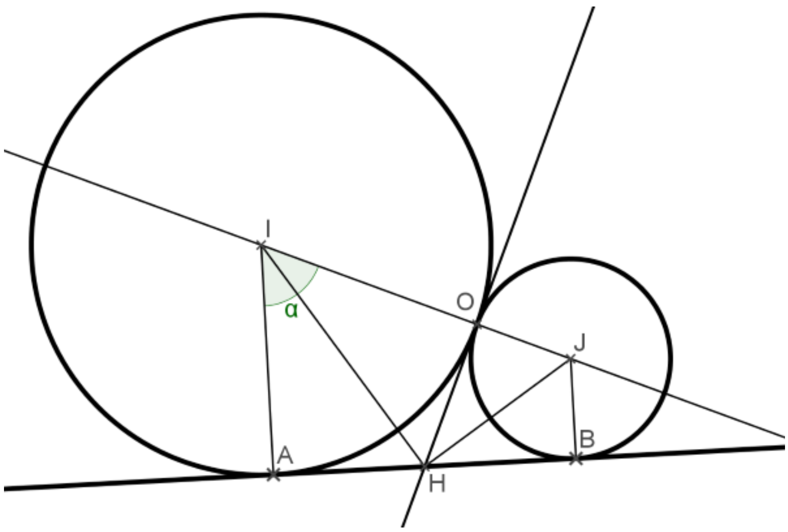


Soit I et J les centres des cercles et O l'intersection des cercles.
Les deux cercles étant tangents en O, [OI] et [OJ] sont perpendiculaires à la tangente en O, donc les points O, I et J sont alignés.
[IA] et [JB] sont perpendiculaires à la droite (AB) et soit le point C intersection de la parallèle à (AB) passant par J et le rayon [IA]. ACJB est donc un rectangle.
On a donc IC = R - r.
Le triangle ICJ est rectangle en C et nous pouvons y appliquer le théorème de Pythagore :

$IJ^2 = IC^2 + CJ^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 = (R-r)^2 + AB^2$

Soit, avec une identité remarquable, $AB^2 = (R+r+R-r)(R+r-R+r) \Leftrightarrow AB^2 = 4Rr$

2[ème] solution (sans Pythagore)



Soit I et J les centres des cercles et O l'intersection des cercles.
Les deux cercles étant tangents en O, [OI] et [OJ] sont perpendiculaires à la tangente en O, donc les points O, I et J sont alignés.
Soit H l'intersection de la tangente en O et de (AB).
$\widehat{IAH} = \widehat{IOH} = 90°$ avec IO = IA, donc IAH et IOH sont superposables. Ainsi AH=OH.
De même OJH et BJH sont superposables, donc BH=OH=AH, donc H milieu de [AB].
La sécante (IJ) à [IA] et [JB] parallèles définit des angles alternes-internes de même mesure, donc

$\widehat{OJB} = 180 - \widehat{AIO} = 180 - \alpha$

donc $\widehat{BJH} = \dfrac{180-\alpha}{2} = 90 - \dfrac{\alpha}{2}$ donc $\widehat{JHB} = \dfrac{\alpha}{2}$. Comme $\widehat{AIH} = \dfrac{\alpha}{2}$ donc les triangles IAH et JBH sont semblables, donc leurs côtés ont des longueurs proportionnelles :

$\dfrac{IA}{BH} = \dfrac{AH}{BJ} \Leftrightarrow \dfrac{R}{AB/2} = \dfrac{AB/2}{r} \Leftrightarrow Rr = \dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow AB^2 = 4Rr$