Exercices sur les fonctions (partie 1)

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $e^{2x} - e^{x+1} < 0$ b) $\ln(x-2) < 3$ c) $1 - e^{x-2} \geq 0$ d) $\ln(3-x) + 1 > 0$

e) $e^x - \dfrac{1}{e^x} \leq 0$ f) $\ln(x-13) < 2\ln(x+3)$ g) $1 - e^{x^2-1} < 0$

Exercice 2

Pour les cas suivants, déterminer les variations de la fonction f sur le domaine de définition I indiqué :

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$ et $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 + \ln x$ et $I = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $I = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

d) $f(x) = (\ln x)(2 - \ln x)$ et $I = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ et $I = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

f) $f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}$ et $I = \mathbb{R} - \{0\}$

g) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$ et $I = \mathbb{R} - \{0\}$

h) $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{4x}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{4(-x+1)}{e^x}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (on écrira la valeur exacte de l'extremum dans le tableau).

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Vérifier que l'ensemble de définition est $]0;2[$.

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{T}$.

Exercice 5

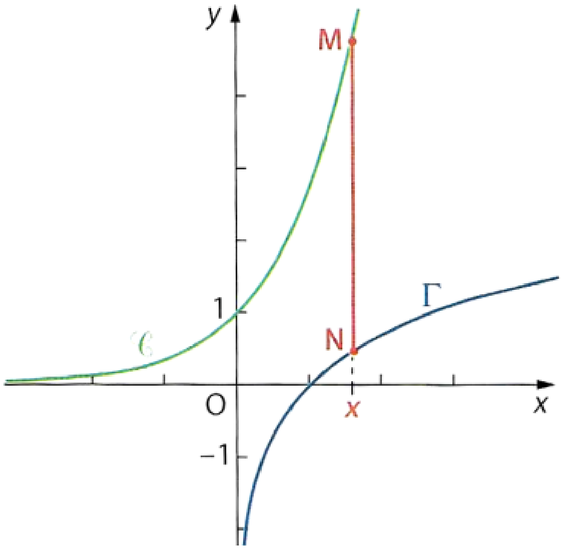
Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathscr{C}$ et Γ d'équations respectives :

$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = \ln(x).$$

On rappelle que pour tout nombre x strictement positif :

$$e^x > \ln(x).$$

À tout nombre x strictement positif, on associe le point M de $\mathscr{C}$ et le point N de Γ de même abscisse x.



1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = xe^{x} - 1$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On note φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $\varphi(x) = e^{x} - \ln(x)$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction φ. Que représente φ pour le problème ?

b. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

c. En utilisant la question **1.**, montrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x$.

1. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 + \ln x$.

b. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g.

2. a. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. Déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 7

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
En déduire que si $x \in [0\,;1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\,;1]$.

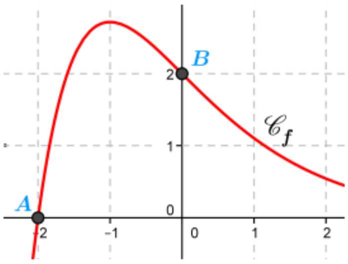
b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8

On a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe de f passe par les points $A(-2;0)$, $B(0;2)$.
On sait que $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des réels.

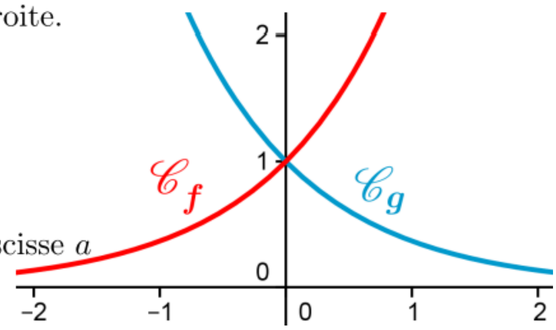
1) A l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
2) En déduire le tableau de variations de f.



Exercice 9

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{-x}$.
Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions.

1) Démontrer que si m est le coefficient directeur d'une droite $\mathscr{D}$ du plan alors le vecteur de coordonnées $(1;m)$ est un vecteur directeur de cette droite.
2) Déterminer, pour tout x réel, $f'(x)$ et $g'(x)$.
3) On note T_a et Δ_a les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a.
   a) Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 sont perpendiculaires.
   b) Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse a sont perpendiculaires quelque soit a réel.



Exercice 10

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$, $I =]4\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$, $I =]0\,;1[$

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = e^{-x+1}$, $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = 2e^{3x-2}$, $I = \mathbb{R}$