Exercices sur la géométrie dans l'espace

Exercice 1

Dans un repère de l'espace, on donne : $A(-2\,;\,8\,;\,9)$, $B(-4\,;\,4\,;\,5)$, $C(0\,;\,4\,;\,-3)$, $D(-8\,;\,6\,;\,7)$ et $E(1\,;\,-2\,;\,3)$.
On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

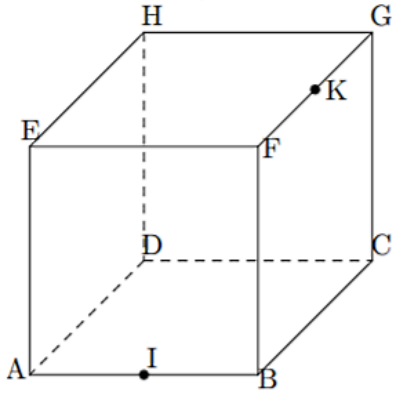
2. Calculer les coordonnées des points I et J.

3. Calculer les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

4. Montrer que les points I, J, L et E sont coplanaires.

Exercice 2

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. I est milieu du segment $[AB]$ et K celui de $[FG]$.



a. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, déterminer les coordonnées des points A, B, F, G.

b. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IK}$.

Exercice 3

Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 6 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1. Donner trois points de la droite $\mathscr{D}$.

2. Donner un point de la droite $\mathscr{D}$ de cote -3.

3. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

4. Donner le vecteur directeur d'ordonnée 12.

Exercice 4

Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\mathscr{D}$ passe par $A\ (2, 1, 6)$ et admet $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

2. $\mathscr{D}$ passe par les points $A\ (1, 3, -4)$ et $B\ (-3, 7, 1)$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on donne $A(1\ ;\ 2\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 0\ ;\ -2)$.

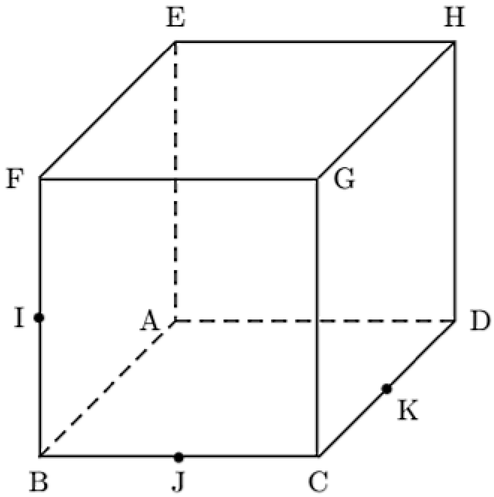
1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

3. Donner une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 6

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

On désigne par M un point du segment $[AG]$.

3. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

4. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

5. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 7 *(bac 2021)*

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J et K vérifiant :

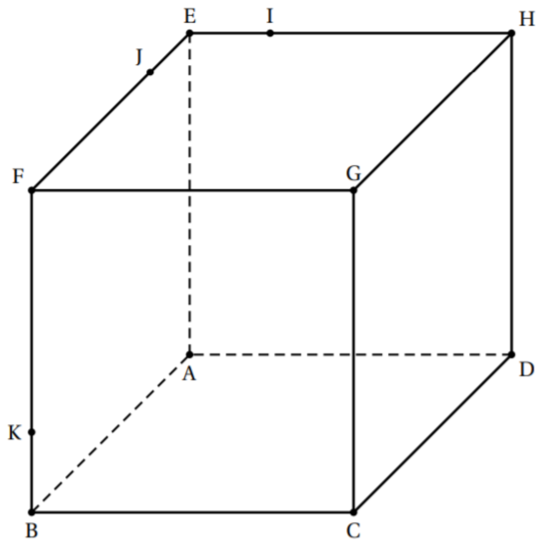
$$\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}, \qquad \overrightarrow{EJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}, \qquad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$$

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x+4y+4z-5=0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).
7. Soit $\mathrm{M}\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.



Exercice 8 *(bac 2021)*

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2\ ;\ -1\ ;\ 0), \mathrm{B}(3\ ;\ -1\ ;\ 2), \mathrm{C}(0\ ;\ 4\ ;\ 1) \text{ et } \mathrm{S}(0\ ;\ 1\ ;\ 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

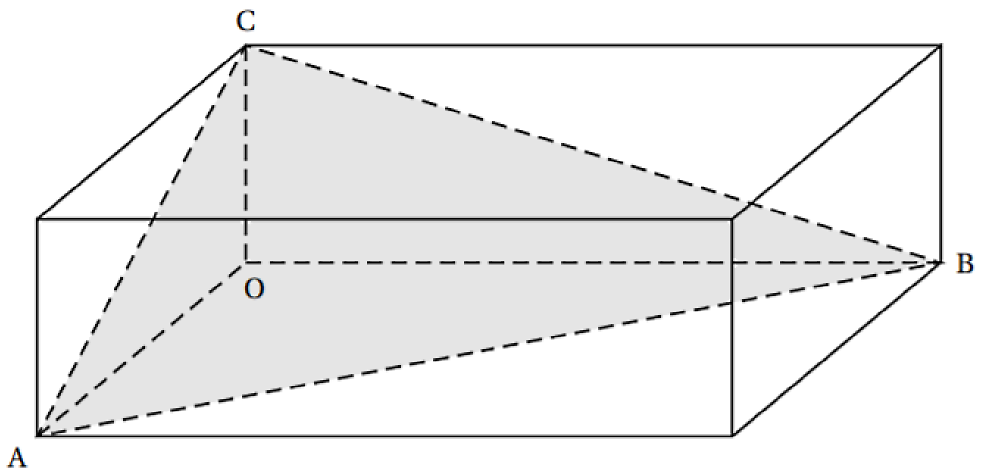
   b. Montrer que les coordonnées du point H sont $\mathrm{H}(2; 2; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

   Calculer le volume du tétraèdre SABC.
5. **a.** Calculer la longueur SA.

   b. On indique que $\mathrm{SB} = \sqrt{17}$.
   En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ASB}}$ approchée au dixième de degré.

Exercice 9 *(bac 2021)*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :
A de coordonnées $(2\,;0\,;0)$, B de coordonnées $(0\,;3\,;0)$ et C de coordonnées $(0\,;0\,;1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

   b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.

   c. Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.