Rappels sur la géométrie dans l'espace

1. Formules du plan étendues à l'espace

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu I de $[AB]$: $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Si le repère est orthonormé la longueur AB vaut : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Méthode de calcul : Si des opérations sont faites sur des vecteurs, les mêmes opérations sont faites sur les coordonnées.

2. Colinéarité et coplanarité

Colinéarité	Coplanarité
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}=k\vec{v}$ avec $k\in\mathbb{R}$	$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}=x\vec{v}+y\vec{w}$ avec $x,y\in\mathbb{R}$
A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires	A, B, C, D coplanaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ coplanaires
$M\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires	$M\in(ABC)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires
$(AB)\parallel(CD)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires	

3. Produit scalaire dans l'espace

Plusieurs expressions du produit scalaire sont possibles :

- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
- $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$
- H projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
- si le repère est orthonormé : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Propriété : $\vec{u}.\vec{v}=0$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\perp\vec{v}$. Cette propriété permet de démontrer que des droites sont orthogonales en utilisant leurs vecteurs directeurs.

4. Équations paramétriques, équations cartésiennes

Représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point

$$A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)\ :\ \begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases}\quad \text{avec}\quad t\in\mathbb{R}$$

Propriétés :

- Deux droites parallèles ont leurs vecteurs directeurs colinéaires.
- Deux droites orthogonales ont leurs vecteurs directeurs orthogonaux.

Définition : un vecteur normal à un plan est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan.

Une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Propriétés :

- Deux plans parallèles ont leurs vecteurs normaux colinéaires.
- Deux plans orthogonaux ont leurs vecteurs normaux orthogonaux.

La distance d'un point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ à un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ vaut :

$$\frac{|ax_A + by_A + cz_A|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$