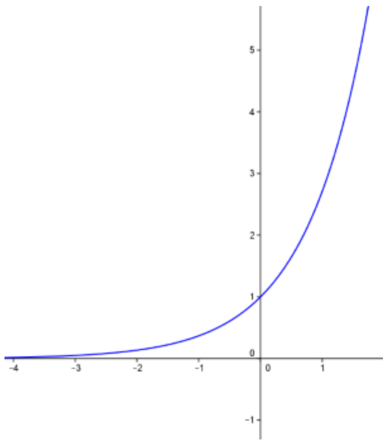
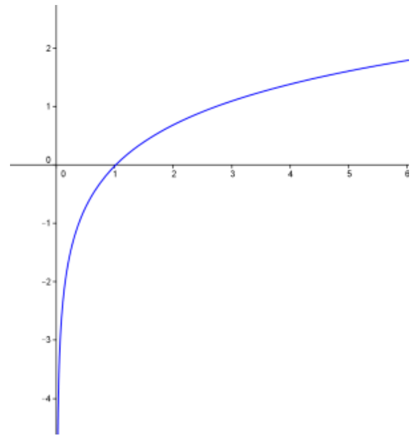
Rappels sur les fonctions

1. Les fonctions exponentielle et logarithme



*Représentation graphique de la **fonction exponentielle***

Domaine de définition de l'exponentielle : $\mathbb{R}$



*Représentation graphique de la **fonction logarithme***

Domaine de définition du logarithme : $]0\,;+\infty[$

$e^1 = e$; $e^0 = 1$	$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
$e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$(e^a)^b = e^{ab}$	$\ln a^n = n \ln a$
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$	$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$	$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

$$e^{\ln x} = x \qquad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \qquad \ln e^x = x$$

2. Dérivation et primitives

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x

$f(x)$	$f'(x)$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
u^n	$n\,u^{n-1} \times u'$
$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u'u^n$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- **Tangente**

Équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a.

- **Variations de f**

$f'(x) > 0$ sur $[a\,;b]$ et nulle en un nombre fini de valeurs $\Rightarrow$ f strictement croissante sur $[a\,;b]$

$f'(x) < 0$ sur $[a\,;b]$ et nulle en un nombre fini de valeurs $\Rightarrow$ f strictement décroissante sur $[a\,;b]$

- **Convexité de f**

$f''(x) > 0$ sur $[a\,;b]$ alors f est convexe sur $[a\,;b]$

$f''(x) < 0$ sur $[a\,;b]$ alors f est concave sur $[a\,;b]$

3. Limites de fonctions

Limite d'une somme

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI*

* forme indéterminée

Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	0	∞
$\lim g$	l'	∞	∞	∞
$\lim f \times g$	$l \times l'$	∞ *	FI**	∞ *

* règle des signes ** forme indéterminée

Limite d'un quotient

$\lim f$	$l \neq 0$			0			∞		
$\lim g$	$l' \neq 0$	0	∞	$l' \neq 0$	0	∞	$l' \neq 0$	0	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	∞ *	0	0	FI**	0	∞ *	∞ *	FI**

* règle des signes ** forme indéterminée

Croissances comparées

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^n \ln x = 0$$

Théorème de comparaison

a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de a.

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème d’encadrement (ou théorème des gendarmes)

a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Soit f, g et h deux fonctions telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$, voisinage de a.

Si $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection)

Soit f une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle ouvert I. Soit J l'intervalle défini par les images des bornes de I ou les limites aux bornes de I.

Alors pour toute valeur $k \in J$ il existe **une unique valeur** $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = k$.