Rappels sur les suites numériques

1. Les 2 types de suites à connaître

Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition : $U_{n+1} = U_n + r$	Définition : $U_{n+1} = U_n \times q$
Propriétés : $U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_p + (n-p)r$	Propriétés : $U_n = U_0 \times q^n$ $U_n = U_p \times q^{n-p}$
Somme : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	Somme : $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Définition

Une suite u ou (u_n) est croissante à partir de n_0 si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite u ou (u_n) est décroissante à partir de n_0 si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$

Méthode : il faut comparer u_{n+1} et u_n. Pour cela on étudie le signe de leur différence.

2. Le raisonnement par récurrence

Moyen de démonstration sur des propriétés avec des entiers naturels. Il faut 2 étapes :

- Initialisation : on vérifie la propriété pour un entier naturel précis, en général 0.
- Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un entier n et on démontre qu'elle est vraie au rang n+1.

On a alors un « effet dominos » qui permet de conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel à partir de l'initialisation.

3. Limites de suites

Limite d'une somme

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI *

* forme indéterminée

Limite d'un produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	0	∞
$\lim g$	l'	∞	∞	∞
$\lim f \times g$	$l \times l'$	∞ *	FI **	∞ *

* règle des signes ** forme indéterminée

Limite d'un quotient

$\lim f$	$l \neq 0$			0			∞		
$\lim g$	$l' \neq 0$	0	∞	$l' \neq 0$	0	∞	$l' \neq 0$	0	∞
$\lim \dfrac{f}{g}$	$\dfrac{l}{l'}$	∞ *	0	0	FI **	0	∞ *	∞ *	FI **

* règle des signes ** forme indéterminée

q	$q > 1$	$-1 < q < 1$
$\lim q^n$	$+\infty$	0

Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang :

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite, alors (v_n) converge aussi vers cette limite.

Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Théorème du point fixe

Soit une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et f une fonction continue sur un intervalle contenant les termes de la suite. Si (u_n) converge vers une limite finie l , alors $f(l) = l$.