Volume d’une sphère[1]

Prérequis

Le volume d’un cylindre est donné par la formule $\pi\ R^2 \times h$ où h est la hauteur et R le rayon de la base.

Pour une longue somme dont chaque terme suit un même modèle d’expression on utilise le symbole Σ (prononcé « sigma ») pour abréger cette somme. Le symbole Σ est suivi de l’expression modèle que l’on retrouve pour chaque terme. Cette expression modèle contient une variable qui varie de 1 en 1. En bas et en haut du symbole Σ on indique la valeur de départ et la valeur d’arrivée de cette variable.

Exemples : $1+2+3+...+100 = \sum_{k=1}^{100} k$ k est ici la variable qui augmente de 1 en 1 à chaque terme

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{100} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{10^2} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2}$ $\frac{1}{k^2}$ est l’expression modèle

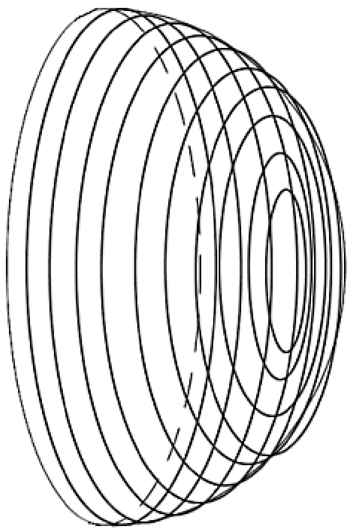
$1+2^2+3^2+4^2+ ... +n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

Comme Σ décrit une somme, on retrouve les propriétés de la somme : l’associativité et la factorisation.

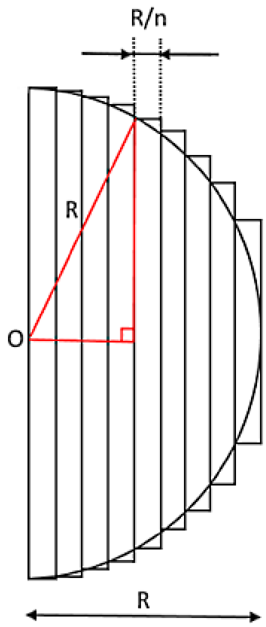
Exemples : $\sum_{k=0}^{n}(k+k^2) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{10}{k} = 10\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Partage de la demi-sphère en cylindres

Prenons une demi-sphère de rayon R que l’on découpe en plusieurs cylindres de faible hauteur identique. On obtient un empilement de cylindres de rayons décroissants depuis le centre vers l’extérieur. Soit n le nombre de cylindres.



Demi-sphère en perspective avec les cylindres empilés



Demi-sphère vue de côté avec les cylindres empilés

Comme il y a n cylindres et que tous ont la même hauteur, la hauteur de chacun d’eux vaut donc $\frac{R}{n}$.

Prenons le k-ième cylindre, k variant de 1 à n. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rouge, on obtient le rayon du cylindre : $\sqrt{R^2 - \left((k-1)\times\frac{R}{n}\right)^2}$ car, avant le k-ième cylindre, k-1 cylindres sont empilés d’une hauteur de $\frac{R}{n}$, ce qui donne une « épaisseur » totale de $(k-1)\times\frac{R}{n}$.

1 Il n’y a pas de confusion à parler du volume d’une sphère plutôt que d’une boule. C’est comme parler de l’aire d’un rectangle qui par définition est un ensemble de segments.

Ainsi, le volume du k-ième cylindre vaut donc : $\pi \times \left(R^2 - \frac{(k-1)^2 R^2}{n^2}\right) \times \frac{R}{n} = \frac{\pi R^3}{n} \times \left(1 - \frac{(k-1)^2}{n^2}\right)$.

La somme totale des cylindres empilés vaut donc $V = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\pi R^3}{n} \times \left(1 - \frac{(k-1)^2}{n^2}\right)\right]$

Ce volume est une approximation du volume de la demi-sphère. Plus le nombre de cylindres empilés est grand et plus leur hauteur est petite, et plus cette approximation est proche du volume de la demi-sphère. On aura donc le volume de la demi-sphère quand n sera le plus grand possible, donc quand n ira vers l'infini.

Après développement de l'expression et en utilisant les propriétés du Σ, on obtient :

$$V = \frac{\pi R^3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\right) = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\right)$$

Dans l'expression modèle du Σ, le k-1 commence à 0 et augmente de 1 en 1 jusqu'à n-1. On peut réécrire l'expression d'une autre manière, en adaptant l'expression modèle et les valeurs de départ et d'arrivée de k :

$$V = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right)$$

Étudions plus en détail la somme $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + (n-1)^2$

Valeur de la somme de n-1 entiers consécutifs au carré

Tout d'abord, déterminons la valeur de la somme de n entiers consécutifs : $1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

Si n est pair

Si l'on additionne les termes extrêmes on obtient $n+1$. Les 2ème termes extrêmes donnent : $(n-1) + 2 = n+1$, et ainsi de suite, on peut regrouper les termes extrêmes par couple dont la somme vaut toujours $n+1$.

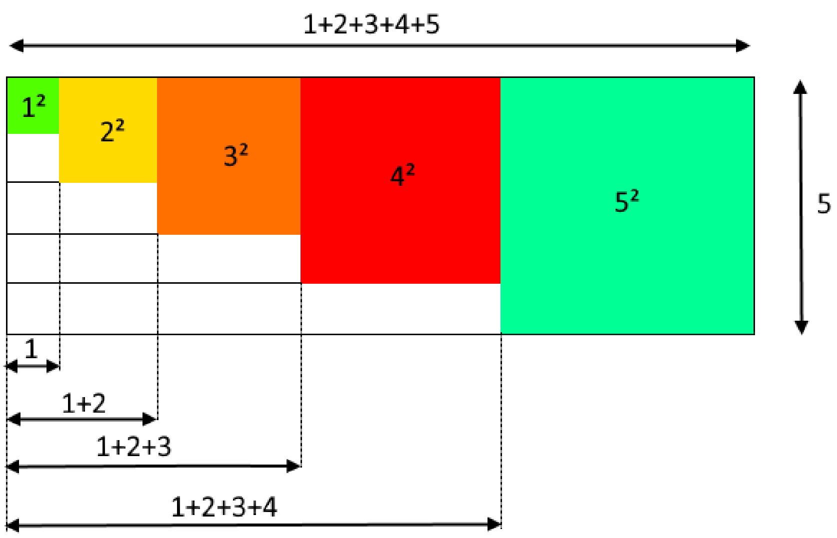
Il y a n entiers dans la somme donc $\frac{n}{2}$ couples, ainsi $\sum_{k=1}^{n} k = (n+1) \times \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Si n est impair

On fait commencer la somme par 0. On a alors $n+1$ termes de somme extrêmes $n + 0 = n$. $n+1$ est pair, il y a $\frac{n+1}{2}$ couples et on retrouve encore : $\sum_{k=1}^{n} k = n \times \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Déterminons maintenant la somme de $n-1$ entiers consécutifs au carré : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2$

Un entier au carré peut être représenté par l'aire d'un carré. La somme de n entiers consécutifs au carré peut donc se schématiser par :



Appelons S la somme que l'on recherche, c'est à dire que : $S = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = 1+2^2+3^2+4^2+ \ldots +(n-1)^2$

En généralisant le schéma pour n-1 carrés, l'aire du grand rectangle vaut : $(n-1) \times \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)^2}{2}$

Cette aire se décompose en n-1 carrés de côtés croissants (la somme S) et n-2 rectangles de largeur 1 et de longueur la somme d'entiers consécutifs. Elle vaut donc aussi : $S + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k(k+1)}{2}$.

Ainsi on obtient l'égalité : $\frac{n(n-1)^2}{2} = S + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k(k+1)}{2}$ soit $\frac{n(n-1)^2}{2} = S + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} k^2$

Le deuxième Σ n'est pas tout à fait S car la valeur d'arrivée de la variable est n-2 et non n-1. On additionne alors des deux côtés de l'égalité par $\frac{(n-1)^2}{2}$ afin d'obtenir S à droite.

On obtient ainsi l'égalité : $\frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n(n-1)^2}{2} = S + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2$

soit : $\frac{(n-1)^2(n+1)}{2} = S + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} k + \frac{1}{2} S$

En isolant S, l'égalité devient : $\frac{3}{2} S = \frac{(n-1)^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{2(n-1)^2(n+1)-(n-1-1)(n-1)}{4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} S = \frac{(n-1)^2(2n+1)+n-1}{4} = \frac{(n-1)[(n-1)(2n+1)+1]}{4} = \frac{(n-1)(2n^2-n)}{4}$$

Ainsi : $\boxed{S = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}$

Conclusion sur le volume de la sphère

L'expression du volume de la demi-sphère est $V = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1}{n^2} S\right)$

En utilisant l'expression de S précédente, on obtient : $V = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1}{n^2} \times \frac{n(2n-1)(n-1)}{6}\right)$

Soit $V = \pi R^3\left(1 - \frac{(2n-1)(n-1)}{6n^2}\right) = \pi R^3\left(1 - \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2}\right)$

Ainsi on obtient comme approximation du volume de la demi-sphère : $\boxed{V = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)}$

On peut vérifier que pour n=1 on a $V = \pi R^3$ soit le volume d'un seul cylindre de hauteur R.
Plus le nombre de cylindres empilés est élevé et plus cette approximation est proche du volume de la demi-sphère.
Ainsi en prenant n de plus en plus grand $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{6n^2}$ se rapprochent de plus en plus de 0.

Pour un nombre de cylindres infini, ces expressions peuvent être considérées égales à 0. On obtient alors le volume de la demi-sphère : $\pi R^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$

La volume de la sphère est double et vaut ainsi : $\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Remarque : $\pi R^3\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right)$ correspond aux volumes des parties des cylindres qui dépassent de la demi-sphère.