Exercices sur les suites numériques

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 6}{u_n - 1}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 2$, alors $u_n = 2$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq 2$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. S'agit-il d'une suite arithmétique ou géométrique ?
2) Montrer que si $u_{n+1} = 1$, alors $u_n = 1$. En déduire que pout tout n, $u_n \neq 1$.
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{2+u_n}{1-u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
4) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 3

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+325}$ b) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$ c) $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$ d) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$

e) $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$ f) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$ g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ h) $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 4

Soit, pour tout entier n, $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$.

Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{n-1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$..

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.
   Quel semble être la limite de (u_n) ?
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.
3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose, pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Déterminer l'expression de S_n, puis de T_n, en fonction de n.
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Exercice 7 *(bac 2021)*

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.
À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12\,500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}98$ dont on précisera le premier terme.

b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Exercice 8 *(bac 2021)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. a. Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
    u = 0,5
    n = 0
    while ......................
        u = ......................
        n = n + 1
    return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 *(bac 2021)*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5\ ;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. **a.** Démontrer que $\ell = \ell'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

Exercice 10 *(bac 2021)*

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.