Trigonométrie : formules d'addition

Démonstration des formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

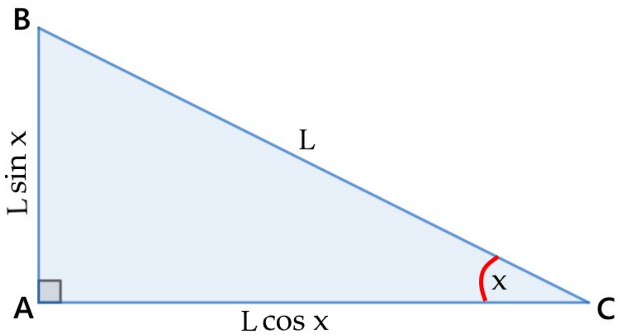
Rappel des relations trigonométriques dans un triangle rectangle dont l'hypoténuse a une longueur L :

$\cos x = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AC}{L}$ soit $AC = L \times \cos x$

$\sin x = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{L}$ soit $AB = L \times \sin x$

En particulier si $L = 1$ alors :

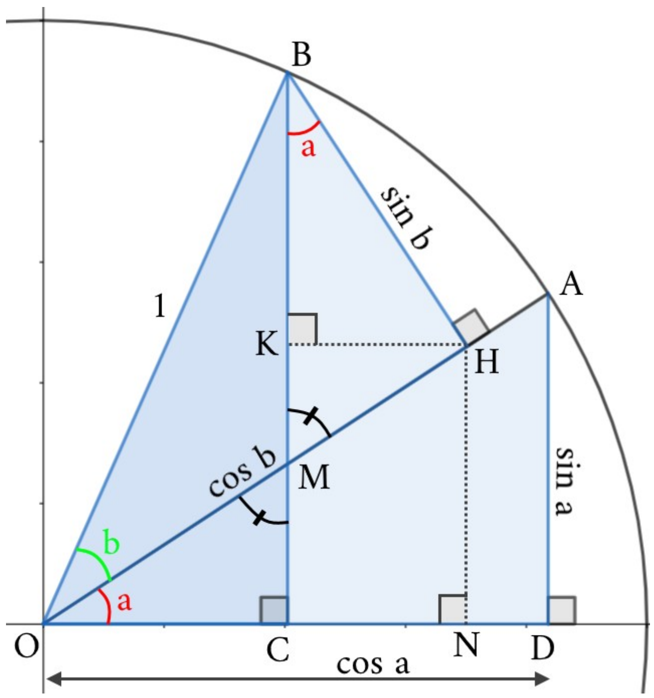
$AC = \cos x$ et $AB = \sin x$



Plaçons 2 triangles rectangles OBH et OAD accolés avec une hypoténuse de longueur 1 selon le tracé suivant.

Dans le triangle OBC on a : $OC = \cos(a+b)$ et $BC = \sin(a+b)$.

Il s'agit donc de calculer ces longueurs.



Les triangles OMC et BMH étant rectangles avec leur angle M opposé par le sommet sont donc semblables et $\widehat{MBH} = \widehat{MOC} = a$.

- $OC = ON - CN = OH \times \cos a - KH$
  $OC = OH \times \cos a - BH \times \sin a$

donc $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin b \sin a$

- $BC = CK + KB = NH + BH \times \cos a$
  $BC = OH \times \sin a + BH \times \cos a$

donc $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

- $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$