Raisonnement mathématique

*Dans chaque exercice répondre par **Vrai** ou **Faux** pour chaque affirmation.*

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$. On note Δ l'ensemble de définition de f.

A. $\Delta =]-\infty\,;\,-3[$.

B. f est dérivable sur l'ensemble de définition Δ.

C. Pour tout $x \in \Delta$, $f'(x) = \dfrac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$.

D. La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \dfrac{7}{4}x - \dfrac{3}{2}$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$.

A. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

B. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f, au point de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\,;\,1\right)$ s'écrit $y = -ex + e + 1$.

C. Pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{e}\right[$, la courbe représentative de f est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

D. La fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$.

Exercice 3

Soit a, b, c trois réels avec a non nul et f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la courbe représentative est une parabole $\mathscr{P}$. On suppose que $\mathscr{P}$ passe par le point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$ et admet en ce point une tangente de pente -1.

A. On a $f'(-1) = -1$, où $f'(-1)$ désigne le nombre dérivé en -1.

B. L'expression $x^2 - 3x + 1$ est une solution de $f(x)$.

C. De l'énoncé, on a toujours $\begin{cases} a - b + c &= -1 \\ 2a + b &= 1 \end{cases}$.

D. Il existe une unique fonction f vérifiant les conditions de l'énoncé

Exercice 4

L'éclairage avant d'une voiture nécessite l'emploi de deux lampes différentes. On note A l'évènement « la première lampe est défaillante » et B l'évènement « la deuxième lampe est défaillante ». Des essais ont montré que

$P(A) = 0,12$; $P(B) = 0,18$ et $P(A \cap B) = 0,07$.

A. Les évènements A et B sont indépendants.

B. La probabilité de l'évènement « au moins une des deux lampes est défaillante » est $0,23$.

C. La probabilité de l'évènement « les deux lampes fonctionnent » est $0,77$.

D. La probabilité de l'évènement « la première lampe fonctionne et la deuxième est défaillante » est $0,11$.

Exercice 5

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + bxe^{-x}$ où a et b sont deux nombres réels.

La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.

En ce point, la tangente à la courbe a comme pente 1.

A. $f'(x) = b(1+x)e^{-x}$.

B. $a = b = 1$.

C. f admet un maximum qui vaut $1 + e$.

D. L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée α, avec $-1 < a < 1$.

Exercice 6

Si $\left(1-\frac{1}{100}\right)^n \leq \frac{1}{2}$ alors :

A. $n \leq ln\left(\frac{0,5}{1-\frac{1}{100}}\right)$

B. $n \geq -\frac{ln2}{\ln(99)-\ln(100)}$

C. $n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,99)}$

D. $n \leq \ln(0,5-\frac{99}{100})$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{2^x} = \frac{x^2}{e^{x\ln 2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Soit $h(x) = [\frac{x^2}{ln2} + \frac{2x}{(ln2)^2} + \frac{2}{(ln2)^3}]2^{-x}$

A. $f'(x) = \frac{x(2-xln2)}{2^x}$

B. Sur $[0;+\infty[$, f a un minimum m lorsque $x = \frac{2}{ln2}$

C. $h'(x) = -x^2e^{-xln2}$

D. Les courbes représentatives de f et h admettent deux points d'intersection

Exercice 8

Soit g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{a}{e^{bx}+1}$ où a et b sont des réels
Soient $A(0;6)$ et $B(4;0)$ deux points
La droite (AB) est tangente à la courbe au point A
Soit $f(x) = e^{bx} - 1$ pour tout réel x dans $[0;+\infty[$

A. $g(0) = 6$ et $g'(0) = -\frac{3}{2}$

B. $g'(x) = \frac{a}{(e^{bx}+1)^2}$

C. Nous avons $a = 12\ et\ b = \frac{1}{2}$

D. La solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[0;+\infty[$ est $x = \frac{\ln(a+1)}{2b}$

Exercice 9

Une entreprise embauche des cadres ingénieurs, les uns sous contrat A travaillant 35 heures et payés 550 euros par semaine, les autres sous contrat B travaillant 20 heures et payés 220 euros par semaine. Le chef d'entreprise peut embaucher au plus 8 personnes sous contrat A et 15 personnes sous contrat B. Chaque semaine, il dispose d'un budget de 5060 euros et 370 heures de travail au moins, doivent être effectuées.

Pour satisfaire ses besoins, l'entreprise ne peut pas embaucher :

A. 7 personnes en contrat A et 7 personnes en contrat B

B. 4 personnes en contrat A et 12 personnes en contrat B

C. 2 personnes en contrat A et 14 personnes en contrat B

D. 6 personnes en contrat A et 8 personnes en contrat B

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{ln10}$

A. $f(2x) = f(2) + f(x)$

B. $f(2^n) = n\,f(2)$

C. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{ln2}{ln10}$

D. Soit $y \in \mathbb{R}$. La solution de l'équation $f(x) = y$ est $x = 10^y$

Exercice 11

Soit $f(x) = \ln x$.

A. Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y = e^{-1}x$.
B. Pour tout $x > 0$, la courbe C_f représentative de f est située au-dessous de chacune de ses tangentes.
C. La fonction $\ln x$ est la réciproque de la fonction exponentielle. Leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
D. $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 12

Soit $g(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$ et $f(x) = (1+x)^x$.

A. $f'(x) = x(1+x)^{x-1}$
B. $D_f =]-1\,;\,+\infty[$
C. $f'(x) = g(x)f(x)$
D. f' est strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.

Exercice 13

Une usine fabrique en grande quantité, un appareil qui peut être défectueux selon deux défauts A et B. Dans un lot de 10 000 appareils prélevés, on a constaté que 500 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 400 appareils présentaient le défaut B (et peut-être le défaut A), et 200 présentaient les défauts A et B simultanément.
Vous achetez un de ces appareils.

A. La probabilité pour qu'il ne présente aucun défaut est égale à 0,07.
B. L'évènement « l'appareil présente le défaut A ou le défaut B » a une probabilité égale à 0,07.
C. Si on a constaté que l'appareil présente déjà le défaut B, la probabilité qu'il présente aussi le défaut A est égale à 0,60.
D. La probabilité pour qu'il présente le défaut A uniquement est égale à 0,03.

Exercice 14

Soit f la fonction définie pour tout x de D par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, I,J).

A. $D =]-\infty\,;\,-3[\cup]1\,;\,+\infty[$

B. $\mathscr{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = 1$ en un seul point d'abscisse négative.

C. f est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.

D. En $x = 3$ la tangente a pour équation $y = \dfrac{x}{3} - (1 + \ln 3)$

Exercice 15

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d quatre réels. Soit $\mathscr{C}_f$ La courbe représentative de la fonction f qui admet aux points A(1 ; 2) et B(0 ; −3) deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = x$.

A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + x - 3$.

B. Sur $]-\infty\,;\,0]$, la fonction f a pour maximum $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{42}}{12}$.

C. La fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$.

D. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Soit f la fonction définie pour tout x de D par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln(x)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
Soit g la fonction définie pour tout x de D par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

A. g est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

B. $g''(x) > 0 \quad \text{sur} \quad D$

C. Pour tout x de D, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

D. $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de Γ, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 17

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ($n > 0$).
U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.
Soit A l'évènement « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
Soit B l'évènement « après l'épreuve l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
Un joueur mise 20 € et effectue une épreuve.
À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans l'urne U_2 :

— Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ €
— Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n €
— Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

Soit X_n la variable aléatoire qui prend pour valeurs les gains algébriques (gains moins mises) du joueur.

A. $P(A) = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)$.

B. $P(B) = \dfrac{6}{4(n+2)}$.

C. L'espérance de X_n est $E(X_n) = \dfrac{3n^2 - 62n - 230}{4n + 12}$.

D. Le jeu est favorable au joueur (l'espérance est positive pour le joueur) pour $n \geqslant 20$.

Exercice 18

On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x - x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

A. Le point J appartient à $\mathscr{C}_f$.
B. Le réel 1 admet trois antécédents par la fonction f.
C. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2x\mathrm{e}^{-x^2+1}$.
D. La tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur positif.

Exercice 19

On considère la fonction f définie pour tout x de $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{\sqrt{x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

A. Pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{5[\ln(x) - 2]}{2x\sqrt{x}}$.
B. L'équation $f(x) = -5$ est équivalente à l'équation $x = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{2}}}$.
C. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I a pour équation $y = 5x - 5$.
D. f admet un maximum sur $]0 ; +\infty[$ qui vaut 10.

Exercice 20

Soit la fonction f_k définie pour tout x de $]0; 1[$ par

$$f_k(x) = x[\ln(x)]^2 + kx, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
On note A_k le point de $\mathscr{C}_k$ qui a pour abscisse 1.

A. $\mathscr{C}_0$ admet deux tangentes parallèles à (OI).
B. La tangente à $\mathscr{C}_k$ en A_k est la droite $(\mathrm{O}A_k)$.
C. Pour tout x de $]0; 1[$, $f_1'(x) = [\ln(x) + 1]^2$.
D. Il existe au moins une valeur réelle de k tel que $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des abscisses.

Exercice 21

On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On considère la fonction g définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

A. La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
B. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent comme unique point d'intersection le point J.
C. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en J et la tangente à $\mathscr{C}_g$ en J sont perpendiculaires.
D. L'ensemble solution de l'inéquation $1 > g(x)$ est $]-\infty ; 0[$.

Exercice 22

Avant l'examen du baccalauréat en fin d'année, les élèves de terminales d'un lycée passent deux examens blancs.

60 % des élèves réussissent le premier examen blanc. La probabilité de rater le deuxième examen blanc est de $0,3$ si le premier a été raté et de $0,2$ si le premier a été réussi.

A. La probabilité qu'un lycéen réussisse les deux examens blancs est strictement supérieure à $0,5$.

B. La probabilité qu'un lycéen réussisse le deuxième examen blanc est strictement supérieure à $0,5$.

C. Si un lycéen réussit le deuxième examen blanc, la probabilité qu'il ait réussi le premier examen blanc est strictement supérieure à $0,5$.

D. Si un lycéen rate le deuxième examen blanc, la probabilité qu'il ait également raté le premier examen blanc strictement supérieure à $0,5$.

Exercice 23

Soit la fonction f_n définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x^2}, \text{ avec } n \geqslant 2.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

On note S_n le point de $\mathscr{C}_n$ qui a pour abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_n'(x) = -2nx^n\mathrm{e}^{-x^2}$.

B. Le maximum de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

C. Pour tout $n \geqslant 2$, $S_2 \in \mathscr{C}_n$.

D. Pour tout $n \geqslant 2$, l'axe des abscisses est la tangente à $\mathscr{C}_n$ à l'origine du repère.

Exercice 24

Soit a un réel. On considère la fonction f_a définie pour tout réel x par $f_a(x) = x + a\mathrm{e}^{-x}$.
Soit C_a la courbe représentative de f_a dans un repère (O, I, J) du plan.
Soit A_a le point de C_a d'abscisse nulle. Soit T_a la tangente à C_a en A_a.

A. f_a est monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \leqslant 0$.

B. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \in T_a$.

C. Lorsque $a > 0$, le minimum de f_a est négatif si et seulement si $a < \mathrm{e} - 1$.

D. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, T_a et (OI) sont sécantes en un point dont l'abscisse est $\dfrac{a}{a-1}$.

Exercice 25

On considère la fonction f définie pour tout x de $]-\infty\,; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2x - 4$$

A. L'image du réel $-\ln(2)$ par la fonction f est le réel $2\ln(2) - \dfrac{30}{8}$.

B. Pour tout x de $]-\infty\,; 2]$, $f'(x) = (3\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x - 1)$.

C. Si a et b sont deux réels négatifs tels que $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

D. En posant $X = \mathrm{e}^x$, on arrive à montrer que dans un repère du plan, la courbe représentative de la fonction f admet deux tangentes qui ont une pente égale à 2.

Exercice 26

La parapharmacie d'un hypermarché est ouverte pendant dix heures le samedi. Quelle que soit l'heure, un seul vendeur est présent. Armand y travaille pendant six heures et Bernard y travaille pendant trois heures. Les plages horaires de présence varient, si bien que le fait qu'un client soit accueilli par Armand, par Bernard ou par un autre vendeur est aléatoire. Quand ils sont accueillis par Armand, 70 % des clients effectuent un achat alors que quand qu'ils sont accueillis par Bernard, 50 % des clients achètent.

On interroge un client qui se présente dans la parapharmacie, on considère l'évènement suivant : on admet que la probabilité que le client choisi effectue un achat est de 0,59.

A. La probabilité que le client soit accueilli par Bernard ou n'effectue pas un achat est de 0,74.

B. La probabilité que le client effectue un achat sachant qu'il n'ait pas été accueilli ni par Armand, ni par Bernard, est de 0,2.

C. la probabilité que le client ait été accueilli par Armand sachant qu'il n'a pas effectué d'achat et de $\frac{15}{41}$.

D. On choisit au hasard chaque samedi, un client et cela pendant n semaines. La probabilité qu'au moins un des n clients ait été accueilli par Armand est de $1-0{,}6^n$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln\left(x^2\right)}$ où ln désigne le logarithme népérien.

A. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble $]0\,;\,+\infty[$.

B. La fonction f peut être reformulée de la façon suivante :

$$f(x)=1+\frac{1}{\ln\left(x^2\right)}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right).$$

C. La courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

D. L'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur l'ensemble de définition.

Exercice 28

Avant l'examen de fin d'année, les étudiants passent deux tests successivement. Les $3/4$ réussissent le premier test. La probabilité de réussir le deuxième test est de $0,7$ si le premier a été réussi et de $0,3$ si le premier a été raté.

L'expérience des années précédentes permet d'affirmer que :

- 80 % des étudiants qui échouent aux deux tests ratent l'examen de fin d'année ;
- 60 % des étudiants qui réussissent l'un des deux tests réussissent l'examen de fin d'année ;
- 95 % des étudiants réussissant les deux tests réussissent l'examen de fin d'année.

A. La probabilité qu'un étudiant réussisse le deuxième test est $3/40$.

B. La probabilité qu'un étudiant réussisse les deux tests est $21/40$.

C. Si un étudiant réussit le deuxième test la probabilité qu'il ait réussi le premier test est $7/8$.

D. Le taux prévisible de succès à l'examen de fin d'année est 62 %.